Проблемы физики, математики и техники, № 1 (34), 2018

МАТЕМАТИКА

УДК 519.21

СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ПОТОКОВ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЗАЯВОК И С ОГРАНИЧЕННЫМ ВРЕМЕНЕМ ПРЕБЫВАНИЯ

Ю.В. Малинковский[1], **Н.Н. Бородин**[2]

[1]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*
[2]*Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого*

QUEUEING NETWORKS WITH FINITE NUMBER OF FLOWS OF NEGATIVE CUSTOMERS AND WITH LIMITED SOJOURN TIME

Yu.V. Malinkovsky[1], **N.N. Borodin**[2]

[1]*F. Scorina Gomel State University*
[2]*P.O. Sukhoi Gomel State Technical University*

Рассматривается экспоненциальная сеть массового обслуживания с обычными положительными и так называемыми отрицательными заявками. Время пребывания заявок в узлах сети ограничено случайной величиной, условное распределение которой при фиксированном числе заявок в узле является показательной. Заявки, обслуженные в узлах, и заявки, покидающие узлы из-за завершения времени пребывания, могут оставаться положительными, становиться отрицательными или покидать сеть в соответствии с разными матрицами маршрутизации.

Ключевые слова: *сеть*, *отрицательная заявка*, *ограниченное время пребывания.*

The exponential queueing network with the usual positive and so called negative customers is considered. The sojourn time of customers in the network nodes is limited by the random variable which conditional distribution is exponential when customer quality in node is fixed. The customers serviced in nodes and customers leaving the nodes when sojourn time is completed can stay positive, become negative or leave the network in accordance with different routing matrixes.

Keywords: *network*, *negative customer*, *limited sojourn time.*

Введение

Сети массового обслуживания Джексона и Геленбе с ограничениями на время пребывания рассматривались в [1], [2]. В настоящей статье результаты работы [2] обобщаются на сети, в которых может быть несколько отрицательных потоков заявок, вычеркивающих несколько положительных заявок.

1 Изолированный узел

В систему массового обслуживания с единственным экспоненциальным прибором с интенсивностью обслуживания μ поступает $T+1$ независимых пуассоновских потоков заявок: поток обычных, требующих обслуживания положительных заявок с интенсивностью λ^+, и T потоков отрицательных заявок с интенсивностями $\lambda_1^-,\ldots,\lambda_T^-$. Поступающая отрицательная заявка *l*-го потока мгновенно уничтожает ровно *l* положительных заявок (при их наличии), и уничтожает все заявки в системе, если их число меньше *l*, $l=\overline{1,T}$. После этого она мгновенно пропадает вместе с уничтоженными положительными заявками, не оказывая в дальнейшем никакого влияния. Время пребывания положительной заявки в системе ограничено случайной величиной, условное распределение которой (если в системе находится n положительных заявок) показательное с параметром $\frac{\upsilon}{n}$. Другими словами, условная вероятность того, что пребывание в системе каждой положительной заявки закончится в промежутке времени $[t,t+h)$, если в момент t в системе находилось n положительных заявок, равна $\frac{\upsilon}{n}h+o(h)$ при $h\to 0$, а условная вероятность завершения пребывания хотя бы одной из этих положительных заявок равна $\upsilon h+o(h)$. Если положительная заявка поступает в пустую систему, то она сразу начинает обслуживаться (при этом с интенсивностью υ покидает систему, не закончив обслуживание). Для определенности будем предполагать, что заявки обслуживаются в порядке поступления в систему (дисциплина FCFS).

Состоянием системы в момент времени t будем считать количество положительных заявок $n(t)$ в этот момент времени. Очевидно, $n(t)$ – цепь Маркова с непрерывным временем и пространством состояний Z_+. Ее стационарное распределение $\{p(n), n=0,1,\ldots\}$, если оно существует, удовлетворяет системе уравнений равновесия для так называемых вертикальных сечений графа переходов цепи:

$$\lambda^+ p(n) = (\mu+\upsilon)p(n+1) + \\ +\sum_{l=1}^{T}\left(\sum_{s=l}^{T}\lambda_s^- p(n+l)\right),\ n=0,1,\ldots. \quad (1.1)$$

Это однородное разностное уравнение порядка T. Частное решение (1.1) ищем в виде $p(n)=z^n$. Подставляя его в (1.1), получим характеристическое уравнение:

$$g(z) = (\mu+\upsilon)z + \sum_{l=1}^{T}\left(\sum_{s=l}^{T}\lambda_s^- z^l\right) - \lambda^+ = \\ = \sum_{s=1}^{T}\left(\sum_{l=1}^{s}\lambda_s^- z^l\right) + (\mu+\upsilon)z - \lambda^+ = 0. \quad (1.2)$$

Докажем достаточность условия

$$\rho = \frac{\lambda^+}{\mu+\upsilon+\sum_{s=1}^{T}s\lambda_s^-} < 1 \quad (1.3)$$

для эргодичности процесса $n(t)$. Сначала используем теорему Декарта [3]. В (1.2) ровно одна перемена знака при переходе от $(\mu+\upsilon)$ к λ^+. Следовательно (1.2) имеет ровно один положительный корень. При этом $g(0)=-\lambda^+<0$ и, в силу (1.3), $g(1)=\sum_{s=1}^{T}s\lambda_s^- + (\mu+\upsilon) - \lambda^+ > 0.$ Поэтому этот корень $z_0\in(0,1)$. Значит уравнение равновесия (1.1) имеет решение $p(n)=z_0{}^n$. С учетом нормировки $\sum_{n=0}^{\infty}p(n)=1,$ получаем:

$$p(n) = (1-z_0)z_0{}^n,\ n=0,1,\ldots. \quad (1.4)$$

Применим эргодическую теорему Фостера [4]. Для того чтобы неприводимая консервативная регулярная цепь Маркова с непрерывным временем была эргодична, необходимо и достаточно, чтобы система уравнений равновесия имела ненулевое решение такое, что

$$\sum_{n=0}^{\infty}|p(n)| < \infty.$$

При выполнении условия (1.3) уравнение (1.2) имеет корень $z_0\in(0,1)$, причем (1.4) – частное решение системы уравнений равновесия (1.2). Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}|p(n)| = \sum_{n=0}^{\infty}(1-z_0)z_0{}^n = 1.$$

Неприводимость и консервативность цепи $n(t)$ очевидны, а регулярность следует из того, что интенсивность выхода $q(n)$ процесса $n(t)$ из состояния n ограничена [5]. Значит, условие (1.3) достаточно для эргодичности $n(t)$, а при его выполнении эргодическое распределение имеет форму (1.4).

2 Сеть массового обслуживания

Рассматривается сеть массового обслуживания, состоящая из N однолинейных экспоненциальных узлов с интенсивностью обслуживания прибором i-го узла $\mu_i, i=\overline{1,N},$ в которую извне поступает $(T+1)N$ независимых пуассоновских потоков заявок. При этом в i-й узел поступает поток обычных (положительных, требующих обслуживание) заявок с параметром Λ_i и T потоков отрицательных заявок с параметрами λ_{il}, $(i=\overline{1,N}, l=\overline{1,T})$ соответственно. Отрицательные заявки не требуют обслуживания. Отрицательная заявка l-го потока при поступлении в i-й узел мгновенно уничтожает ровно l положительных заявок (при их наличии) и уничтожает все заявки в системе, если их число меньше l, $i=\overline{1,N}$, $l=\overline{1,T}$. После этого она мгновенно пропадает вместе с уничтоженными положительными заявками, не оказывая в дальнейшем никакого влияния. Если отрицательная заявка поступает в узел, свободный от положительных заявок, то она вообще не оказывает влияния на сеть и мгновенно пропадает. Время пребывания положительной заявки в i-ом узле ограничено случайной величиной, условное распределение которой (если в узле находится n_i положительных заявок) показательное с параметром $\frac{\upsilon_i}{n_i}$. Другими словами, условная вероятность того, что пребывание в i-ом узле каждой положительной заявки закончится в промежутке времени $[t,t+h)$, если в момент t в i-ом узле находилось n_i положительных заявок, равна $\frac{\upsilon_i}{n_i}h+o(h)$ при $h\to 0,$ а условная вероятность завершения пребывания хотя бы одной из этих положительных заявок равна $\upsilon_i h+o(h)$. Если положительная заявка поступает в пустой узел, то она сразу начинает обслуживаться (при этом с интенсивностью υ_i покидает узел, не закончив обслуживание). Число мест для ожидания положительных заявок в узлах сети не ограничено. Для определенности будем предполагать, что заявки обслуживаются в узлах в порядке поступления (дисциплина FCFS). Положительная заявка, обслуженная в i-ом узле, мгновенно и независимо от других заявок переходит в j-й узел как положительная с вероятностью p_{ij}^+ и как отрицательная заявка l-го потока отрицательных заявок с вероятностью p_{ijl}^- и покидает сеть с вероятностью p_{i0} $(i,j=\overline{1,N}, l=\overline{1,T})$. При этом

$$\sum_{j=1}^{N}\left(p_{ij}^+ + \sum_{l=1}^{T}p_{ijl}^-\right) + p_{i0} = 1 \ \ (i=\overline{1,N}).$$

Положительная заявка, время пребывания которой в i-ом узле закончилось, мгновенно и независимо от других заявок переходит в j-й узел как положительная с вероятностью r_{ij}^+ и как отрицательная заявка l-го потока отрицательных заявок с вероятностью r_{ijl}^- и покидает сеть с вероятностью r_{i0} $(i,j=\overline{1,N}, l=\overline{1,T})$. При этом

$$\sum_{j=1}^{N}\left(r_{ij}^+ + \sum_{l=1}^{T} r_{ijl}^-\right) + r_{i0} = 1 \quad (i=\overline{1,N}).$$

Состояние сети описывается случайным вектором $\vec{n}(t)=(n_1(t),n_2(t),\ldots,n_N(t))$, где $n_i(t)$ – число положительных заявок в i-ом узле в момент времени t. В силу предпосылок относительно входящих потоков и распределения длительностей обслуживания $\vec{n}(t)$ – многомерная цепь Маркова с непрерывным временем и пространством состояний $X=Z_+{}^N$, где $Z_+=\{0,1,\ldots\}$.

Изолируем i-ый узел от сети, считая, что в него поступают пуассоновские потоки заявок с теми же интенсивностями, с которыми в этот узел поступают заявки соответствующих потоков сети (которые не являются пуассоновскими). Ко всем обозначениям для изолированного узла добавим в качестве первого индекса индекс i, соответствующий номеру узла. Характеристическое уравнение (1.2) с подставленным в него корнем z_{i0} принимает форму тождества

$$(\mu_i+\upsilon_i)z_{i0} + \sum_{l=1}^{T}\left(\sum_{s=l}^{T}\lambda_{is}^- z_{i0}^l\right) - \lambda_i^+ = 0,\ i=\overline{1,N}. \quad (2.1)$$

Согласно результатам раздела 1, при выполнении условий эргодичности

$$\rho_i = \frac{\lambda_i^+}{\mu_i+\upsilon_i+\sum_{s=1}^{T} s\lambda_{is}^-} < 1,\ i=\overline{1,N}, \quad (2.2)$$

стационарное распределение изолированного узла имеет форму

$$p_i(n_i) = (1-z_{i0})z_{i0}^{n_i},\ n_i = 0,1,\ldots. \quad (2.3)$$

Отсюда вероятность занятости прибора i-го узла в стационарном режиме равна z_{i0}. Значит, интенсивности потоков положительных и отрицательных заявок в рассматриваемой сети удовлетворяют следующей системе уравнений трафика:

$$\lambda_i^+ = \Lambda_i + \sum_{j=1}^{N} z_{j0}(\mu_j p_{ji}^+ + \upsilon_j r_{ji}^+),\ i=\overline{1,N}, \quad (2.4)$$

$$\lambda_{il}^- = \lambda_{il} + \sum_{j=1}^{N} z_{j0}(\mu_j p_{jil}^- + \upsilon_j r_{jil}^-), \quad i=\overline{1,N},\ l=\overline{1,T}. \quad (2.5)$$

С помощью теоремы непрерывности неявной функции и теоремы Брауэра о неподвижной точке можно доказать, что существует строго положительное решение системы уравнений трафика (2.4), (2.5).

Если стационарное распределение $p(\vec{n})$ существует, то оно удовлетворяет уравнениям глобального равновесия

$$\begin{aligned}
p(\vec{n})\sum_{i=1}^{N}\left[\Lambda_i + (\mu_i+\upsilon_i+\sum_{l=1}^{T}\lambda_{il})I_{\{n_i\neq 0\}}\right] = \\
= \sum_{i=1}^{N}\Big\{p(\vec{n}-\vec{e}_i)\Lambda_i I_{\{n_i\neq 0\}} + \\
+ p(\vec{n}+\vec{e}_i)[\mu_i p_{i0} + \upsilon_i r_{i0} + \lambda_{i1} + \\
+ (\lambda_{i2}+\ldots+\lambda_{iT})I_{\{n_i=0\}}] + \\
+ \sum_{l=2}^{T} p(\vec{n}+l\vec{e}_i)[\lambda_{il} + (\lambda_{il+1}+\ldots+\lambda_{iT})I_{\{n_i=0\}}] + \\
+ \sum_{j=1}^{N}\Big[p(\vec{n}+\vec{e}_j-\vec{e}_i)(\mu_j p_{ji}^+ + \upsilon_j r_{ji}^+)I_{\{n_i\neq 0\}} + \\
+ \sum_{l=1}^{T} p(\vec{n}+\vec{e}_j+l\vec{e}_i)(\mu_j(p_{jil}^- + (p_{jil+1}^-+\ldots+p_{jiT}^-)I_{\{n_i=0\}}) + \\
+ \upsilon_j(r_{jil}^- + (r_{jil+1}^-+\ldots+r_{jiT}^-)I_{\{n_i=0\}})) + \\
+ p(\vec{n}+\vec{e}_j)(\mu_j(p_{ji1}^-+\ldots+p_{jiT}^-) + \\
+ \upsilon_j(r_{ji1}^-+\ldots+r_{jiT}^-))I_{\{n_i=0\}}\Big]\Big\},\ \vec{n}\in Z_+^N.
\end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь $\vec{e}_i$ – единичный вектор i-го направления, I_A – индикатор события A, равный единице, если событие A происходит, и нулю, если происходит противоположное событие.

Покажем, что при выполнении условия эргодичности (2.2) вероятности, задаваемые формулой

$$p(\vec{n}) = \prod_{i=1}^{N} p_i(n_i),\ \vec{n}\in Z_+^N, \quad (2.7)$$

где $p_i(n_i)$ определены равенством (2.3), удовлетворяют уравнениям глобального равновесия (2.6).

Разобьем (2.6) на уравнения локального равновесия. Первое уравнение получается, если подставить $I_{\{n_i=0\}} = 1 - I_{\{n_i\neq 0\}}$ и прировнять слева и справа части, содержащие множитель $I_{\{n_i\neq 0\}}$, а второе уравнение получается, если прировнять части, не содержащие этот множитель. В результате получим:

$$\begin{aligned}
p(\vec{n})\sum_{i=1}^{N}\left[(\mu_i+\upsilon_i+\sum_{l=1}^{T}\lambda_{il})\right] = \\
= \sum_{i=1}^{N}\Big\{p(\vec{n}-\vec{e}_i)\Lambda_i - p(\vec{n}+\vec{e}_i)[\lambda_{i2}+\ldots+\lambda_{iT}] - \\
- \sum_{l=2}^{T} p(\vec{n}+l\vec{e}_i)[\lambda_{il+1}+\ldots+\lambda_{iT}] + \\
+ \sum_{j=1}^{N}\Big[p(\vec{n}+\vec{e}_j-\vec{e}_i)(\mu_j p_{ji}^+ + \upsilon_j r_{ji}^+) - \\
- \sum_{l=1}^{T} p(\vec{n}+\vec{e}_j+l\vec{e}_i)(\mu_j(p_{jil+1}^-+\ldots+p_{jiT}^-) + \\
+ \upsilon_j(r_{jil+1}^-+\ldots+r_{jiT}^-)) -
\end{aligned} \quad (2.8)$$

$$-p(\vec{n}+\vec{e}_j)(\mu_j(p_{ji1}^- + \ldots + p_{jiT}^-) +$$
$$+\upsilon_j(r_{ji1}^- + \ldots + r_{jiT}^-))\Big]\Big\},\ \vec{n} \in Z_+^N$$

$$p(\vec{n})\sum_{i=1}^{N}\Lambda_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{N}\Big\{ p(\vec{n}+\vec{e}_i)[\mu_i p_{i0} + \upsilon_i r_{i0} + \lambda_{i1} + \lambda_{i2} + \ldots + \lambda_{iT}] +$$
$$+\sum_{l=2}^{T} p(\vec{n}+l\vec{e}_i)[\lambda_{il} + \lambda_{il+1} + \ldots + \lambda_{iT}] + \qquad (2.9)$$
$$+\sum_{j=1}^{N}\Big[\sum_{l=1}^{T} p(\vec{n}+\vec{e}_j + l\vec{e}_i)(\mu_j(p_{jil}^- + p_{jil+1}^- + \ldots + p_{jiT}^-) +$$
$$+\upsilon_j(r_{jil}^- + r_{jil+1}^- + \ldots + r_{jiT}^-)) +$$
$$+p(\vec{n}+\vec{e}_j)(\mu_j(p_{ji1}^- + \ldots + p_{jiT}^-) +$$
$$+\upsilon_j(r_{ji1}^- + \ldots + r_{jiT}^-))\Big]\Big\},\ \vec{n} \in Z_+^N.$$

Разобьем (2.8) на более детальные уравнения локального равновесия, приравнивая соответствующие слагаемые в суммах слева и справа:

$$p(\vec{n})\left(\mu_i + \upsilon_i + \sum_{l=1}^{T}\lambda_{il}\right) =$$
$$= p(\vec{n}-\vec{e}_i)\Lambda_i - p(\vec{n}+\vec{e}_i)[\lambda_{i2} + \ldots + \lambda_{iT}] -$$
$$-\sum_{l=2}^{T} p(\vec{n}+l\vec{e}_i)[\lambda_{il+1} + \ldots + \lambda_{iT}] + \qquad (2.10)$$
$$+\sum_{j=1}^{N}\Big[p(\vec{n}+\vec{e}_j-\vec{e}_i)(\mu_j p_{ji}^+ + \upsilon_j r_{ji}^+) -$$
$$-\sum_{l=1}^{T} p(\vec{n}+\vec{e}_j + l\vec{e}_i)(\mu_j(p_{jil+1}^- + \ldots + p_{jiT}^-) +$$
$$+\upsilon_j(r_{jil+1}^- + \ldots + r_{jiT}^-)) -$$
$$-p(\vec{n}+\vec{e}_j)(\mu_j(p_{ji1}^- + \ldots + p_{jiT}^-) +$$
$$+\upsilon_j(r_{ji1}^- + \ldots + r_{jiT}^-))\Big],\ \vec{n} \in Z_+^N,\ i = \overline{1,N}.$$

Очевидно, всякое решение уравнений (2.9), (2.10) является решением уравнений глобального равновесия (2.6).

Проверим (2.10). Разделив (2.10) на $p(\vec{n})$, подставляя в полученное равенство (2.7) и используя характеристическое уравнение (2.1), уравнения трафика (2.4)–(2.5), получим:

$$\mu_i + \upsilon_i + \sum_{l=1}^{T}\lambda_{il} = \frac{\Lambda_i}{z_{i0}} - \sum_{l=1}^{T-1}\sum_{s=l+1}^{T} z_{i0}^l \lambda_{is} +$$
$$+\frac{1}{z_{i0}}\sum_{j=1}^{N} z_{j0}(\mu_j p_{ji}^+ + \upsilon_j r_{ji}^+) -$$
$$-\sum_{j=1}^{N}\Big[\sum_{l=1}^{T-1} z_{j0} z_{i0}^l(\mu_j(p_{jil+1}^- + \ldots + p_{jiT}^-) +$$
$$+\upsilon_j(r_{jil+1}^- + \ldots + r_{jiT}^-)) +$$
$$+z_{j0}(\mu_j(p_{ji1}^- + \ldots + p_{jiT}^-) + \upsilon_j(r_{ji1}^- + \ldots + r_{jiT}^-))\Big] =$$
$$= \frac{\Lambda_i}{z_{i0}} - \sum_{l=1}^{T-1}\sum_{s=l+1}^{T} z_{i0}^l\lambda_{is} + \frac{\lambda_i^+ - \Lambda_i}{z_{i0}} -$$
$$-\sum_{l=1}^{T-1} z_{i0}^l \sum_{j=1}^{N} z_{j0}\left(\mu_j \sum_{s=l+1}^{T} p_{jis}^- + \upsilon_j \sum_{s=l+1}^{T} r_{jis}^-\right) -$$
$$-\sum_{j=1}^{N} z_{j0}\left(\mu_j \sum_{s=1}^{T} p_{jis}^- + \upsilon_j \sum_{s=1}^{T} r_{jis}^-\right) =$$
$$= \frac{\lambda_i^+}{z_{i0}} - \sum_{l=1}^{T-1}\sum_{s=l+1}^{T} z_{i0}^l\lambda_{is} -$$
$$-\sum_{l=1}^{T-1} z_{i0}^l \sum_{s=l+1}^{T}\sum_{j=1}^{N} z_{j0}(\mu_j p_{jis}^- + \upsilon_j r_{jis}^-) -$$
$$-\sum_{s=1}^{T}\sum_{j=1}^{N} z_{j0}(\mu_j p_{jis}^- + \upsilon_j r_{jis}^-) =$$
$$= \frac{\lambda_i^+}{z_{i0}} - \sum_{l=1}^{T-1}\sum_{s=l+1}^{T} z_{i0}^l\lambda_{is} -$$
$$-\sum_{l=1}^{T-1} z_{i0}^l \sum_{s=l+1}^{T}(\lambda_{is}^- - \lambda_{is}) - \sum_{s=1}^{T}(\lambda_{is}^- - \lambda_{is}) =$$
$$= \frac{\lambda_i^+}{z_{i0}} - \sum_{l=1}^{T-1}\sum_{s=l+1}^{T} z_{i0}^l\lambda_{is} - \frac{1}{z_{i0}}\sum_{l=2}^{T} z_{i0}^l \sum_{s=l}^{T}\lambda_{is}^- +$$
$$+\sum_{l=1}^{T-1} z_{i0}^l \sum_{s=l+1}^{T}\lambda_{is} - \sum_{s=1}^{T}(\lambda_{is}^- - \lambda_{is}) =$$
$$= \frac{\lambda_i^+}{z_{i0}} - \frac{1}{z_{i0}}\left(\lambda_i^+ - (\mu_i + \upsilon_i)z_{i0} - z_{i0}\sum_{s=1}^{T}\lambda_{is}^-\right) -$$
$$-\sum_{s=1}^{T}(\lambda_{is}^- - \lambda_{is}) = \mu_i + \upsilon_i + \sum_{s=1}^{T}\lambda_{is},$$

т. е. (2.10) выполняется.

Лемма 2.1. *При выполнении уравнений трафика* (2.4)–(2.5) *будет иметь место тождество*:

$$\sum_{i=1}^{N} z_{i0}(\mu_i p_{i0} + \upsilon_i r_{i0}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{N}\left(\Lambda_i - \lambda_i^+ + \sum_{l=1}^{T}(\lambda_{il} - \lambda_{il}^-) + z_{i0}(\mu_i + \upsilon_i)\right). \qquad (2.11)$$

Доказательство получается суммированием (2.5) по $l = \overline{1,T}$, затем полученное уравнение вместе с (2.6) суммируются по $i = \overline{1,N}$. Так же учитываем, что

$$p_{i0} = 1 - \sum_{j=1}^{N}\left(p_{ij}^+ + \sum_{l=1}^{T} p_{ijl}^-\right),$$
$$r_{i0} = 1 - \sum_{j=1}^{N}\left(r_{ij}^+ + \sum_{l=1}^{T} r_{ijl}^-\right),\ (i = \overline{1,N}).$$

Проверим (2.9). Разделив (2.9) на $p(\vec{n})$, подставляя в полученное равенство (2.7) и используя характеристическое уравнение (2.1), уравнения трафика (2.4)–(2.5), а также (2.11), получим:

$$\sum_{i=1}^{N}\Lambda_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{N}\Big\{ z_{i0}[\mu_i p_{i0} + \upsilon_i r_{i0} + \lambda_{i1} + \lambda_{i2} + \ldots + \lambda_{iT}] +$$
$$+\sum_{l=2}^{T} z_{i0}^l[\lambda_{il} + \lambda_{il+1} + \ldots + \lambda_{iT}] +$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\left[\sum_{l=1}^{T} z_{j0} z_{i0}^{l}(\mu_j(p_{jil}^{-}+p_{jil+1}^{-}+\ldots+p_{jiT}^{-})+\right.$$
$$+\upsilon_j(r_{jil}^{-}+r_{jil+1}^{-}+\ldots+r_{jiT}^{-}))+$$
$$+z_{j0}(\mu_j(p_{ji1}^{-}+\ldots+p_{jiT}^{-})+$$
$$\left.\left.+\upsilon_j(r_{ji1}^{-}+\ldots+r_{jiT}^{-}))\right]\right\}=$$
$$=\sum_{i=1}^{N}\left\{z_{i0}[\mu_i p_{i0}+\upsilon_i r_{i0}]+\sum_{l=1}^{T} z_{i0}^{l}\sum_{s=l}^{T}\lambda_{is}+\right.$$
$$+\sum_{j=1}^{N}\left[\sum_{l=1}^{T} z_{j0} z_{i0}^{l}(\mu_j\sum_{s=l}^{T} p_{jis}^{-}+\upsilon_j\sum_{s=l}^{T} r_{jis}^{-})+\right.$$
$$\left.\left.+z_{j0}\left(\mu_j\sum_{s=1}^{T} p_{jis}^{-}+\upsilon_j\sum_{s=1}^{T} r_{jis}^{-}\right)\right]\right\}=$$
$$=\sum_{i=1}^{N}\left\{\Lambda_i-\lambda_i^{+}+\sum_{l=1}^{T}(\lambda_{il}-\lambda_{il}^{-})+z_{i0}(\mu_i+\upsilon_i)+\right.$$
$$+\sum_{l=1}^{T} z_{i0}^{l}\sum_{s=l}^{T}\lambda_{is}+\sum_{l=1}^{T} z_{i0}^{l}\sum_{s=l}^{T}\sum_{j=1}^{N} z_{j0}(\mu_j p_{jis}^{-}+\upsilon_j r_{jis}^{-})+$$
$$\left.+\sum_{s=1}^{T}\sum_{j=1}^{N} z_{j0}(\mu_j p_{jis}^{-}+\upsilon_j r_{jis}^{-})\right\}=$$
$$=\sum_{i=1}^{N}\left\{\Lambda_i-\lambda_i^{+}+\sum_{l=1}^{T}(\lambda_{il}-\lambda_{il}^{-})+\right.$$
$$+z_{i0}(\mu_i+\upsilon_i)+\sum_{l=1}^{T} z_{i0}^{l}\sum_{s=l}^{T}\lambda_{is}+$$
$$\left.+\sum_{l=1}^{T} z_{i0}^{l}\sum_{s=l}^{T}(\lambda_{is}^{-}-\lambda_{is})+\sum_{s=1}^{T}(\lambda_{is}^{-}-\lambda_{is})\right\}=$$
$$=\sum_{i=1}^{N}\left\{\Lambda_i-\lambda_i^{+}+z_{i0}(\mu_i+\upsilon_i)+\sum_{l=1}^{T} z_{i0}^{l}\sum_{s=l}^{T}\lambda_{is}^{-}\right\}=\sum_{i=1}^{N}\Lambda_i,$$

т. е. (2.9) также выполняется. Теперь воспользуемся одним из вариантов эргодической теоремы Фостера [4], который гласит, что для эргодичности неприводимой консервативной регулярной цепи Маркова с непрерывным временем достаточно существования нетривиального решения $\{p(\vec{n}),\ \vec{n}\in X\}$ уравнений глобального равновесия такого, что ряд $\sum_{\vec{n}\in X} p(\vec{n})$ абсолютно сходится. При этом нормированное решение и будет эргодическим распределением. Неприводимость и консервативность цепи $\vec{n}(t)$ очевидны. Поскольку интенсивности выхода из состояний $q(\vec{n})\le\sum_{i=1}^{N}\left[\Lambda_i+\mu_i+\upsilon_i+\sum_{l=1}^{T}\lambda_{il}\right]$ ограничены по $\vec{n}$, то цепь регулярна. Мы показали, что (2.7) является нетривиальным решением уравнений глобального равновесия (2.6). При выполнении условий эргодичности (2.2) ряд $\sum_{\vec{n}\in X} p(\vec{n})$ сходится как произведение рядов, представляющих суммы геометрических прогрессий со знаменателями $z_{i0}\in(0,1),\ i=\overline{1,N}$. При этом найденное решение уравнений глобального равновесия удовлетворяет условию нормировки, поскольку ему удовлетворяют множители $p_i(n_i)$. Следовательно, оно и будет эргодическим распределением. Таким образом, имеет место следующая теорема.

***Теорема* 2.2.** При выполнении условий (2.2) цепь Маркова $\vec{n}(t)$ эргодична, а ее единственное стационарное распределение имеет форму произведения (2.7) с множителями (2.3), где $z_{i0}\in(0,1),\ i=\overline{1,N}$ – корни уравнений (2.1), а $\left\{\lambda_i^{+},\lambda_{il}^{-},\ i=\overline{1,N},\ l=\overline{1,T}\right\}$ – решение системы уравнений трафика (2.4)–(2.5).

Заключение

В настоящей работе исследовалась сеть массового обслуживания с однолинейными узлами, в которую извне помимо обычных потоков положительных заявок поступает несколько потоков отрицательных заявок. Время пребывания положительных заявок в узлах ограничено случайной величиной. Обслуженные в узлах заявки и заявки, не дождавшиеся обслуживания из-за окончания времени пребывания, переходят в узлы в соответствии с разными матрицами маршрутизации. Возможность варьирования матрицами маршрутизации позволяет учитывать самые разнообразные практические ситуации и снижать необходимым образом нагрузку в узлах сети. Для таких сетей получены условия эргодичности и найдено стационарное распределение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Malinkovski*, *Yu.V.* Jackson Networks with Single-Line Nodes and Limited Sojourn or Waiting Times / Yu.V Malinkovski // Automation and Remote Control. – 2015. – Vol. 76, № 4. – P. 603–612.

2. *Malinkovskii*, *Yu.V.* Stationary Probability Distribution for States of G-Networks with Constrained Sojourn Time / Yu.V. Malinkovskii // Automation and Remote Control. – 2017. – Vol. 78, № 10. – P. 1856–1865.

3. *Курош*, *А.Г.* Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. – М.: Наука, 1971. – 432 с.

4. *Бочаров*, *П.П.* Теория массового обслуживания / П.П. Бочаров, А.В. Печинкин – М.: РУДН, 1995. – 529 с.

5. *Гихман*, *И.И.* Введение в теорию случайных процессов / И.И. Гихман, А.В. Скороход. – М.: Наука, 1977. – 568 с.

6. *Gelenbe*, *E.* Product-form Queueing Networks with Negative and Positive Customers / E. Gelenbe // J. Appl. Prob. – 1991. – Vol. 28. – P. 656–663.

Поступила в редакцию 26.01.18.